Zadání 11

Úloha 1.

(a) *Spočtěte Fourierovu transformaci funkce* $g(t) = (f_1 * f_2)(t)$, *kde* $f_1(t) = e^{-t}\mathbb{1}(t)$ *a* $f_2(t) = e^{-2t}\mathbb{1}(t)$.

[Tento Fourierův obraz už víme z minulé sady dobrovolných domácích úloh.]

(b) *Určete funkci* $g(t)$.

[Hint: Mohli bychom konvoluci samozřejmě napočítat přímo z definice (a není to tak těžké), ale to dělat nechceme. Z (a) již víme její Four. obraz, takže aplikujeme větu o inverzi a tím získáme $g(t)$.*]*

Úloha 2. *Pomocí Fourierovy transformace nalezněte řešení diferenciální rovnice*

$$y''(t) - 4y'(t) + 3y(t) = h(t)$$

na $(-\infty, \infty)$. *Funkce* $h \in L^1(\mathbb{R})$ *je spojitá funkce, jejíž Fourierova transformace se rovná*

$$\tilde{h}(\omega) = \frac{4}{(\omega + 3i)(\omega - i)}.$$

Úloha 3. *Je dána funkce*

$$f(t) = \begin{cases} e^{-2t} \sin t, & t \in [0, \pi); \\ 0, & t \in [\pi, 2\pi); \\ te^{it}, & t \geq 2\pi. \end{cases}$$

(a) *Zapište* $f(t)$ *pomocí Heavisideovy funkce.*

(b) *Nalezněte Laplaceovu transformaci funkce* $f(t)$.

(c) *Nalezněte Laplaceovu transformaci funkce* $g(t)$ *s periodou* $T = 2\pi$, *která je na intervalu* $[0, 2\pi)$ *dána předpisem* $g(t) = f(t)$.

Úloha 4. *Určete Laplaceovu transformaci periodické funkce* $f(t)$ *s periodou* $T > 0$, *která je pro* $t \in [0, T)$ *zadána předpisem* $f(t) = \mathbb{1}(t - \frac{T}{2})$.